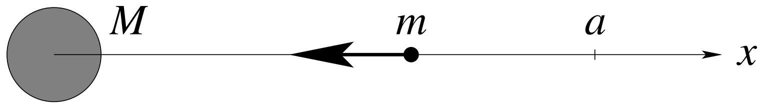

STÖRUNGSRECHNUNG, INTERGRALE

Störungerechnung ist eine leistungsfähige Methode, um effektiv Probleme zu behandeln, die als kleine Störungen von einfachen Problemen aufgefasst werden können. Integrieren gehört neben dem Differenzieren zu einer der wichtigsten Techniken, die der Physiker auf dem Gebiet der Analysis benötigt. Beides üben wir hier an Beispielen.

[H22] *Erneut Meteoritenalarm* **[5 Punkte]**

Ein punktförmiger Meteorit der Masse m nähert sich der Erde (Masse M, Radius R) mit so großer Geschwindigkeit, dass seine kinetische Energie im Bereich $R < x < a$ stets viel größer als die durchlaufene Potentialdifferenz bleibt. Hierbei sei die Anfangsbedingung durch die erste Beobachtung zu $t = 0$ gegeben: $x(0) = a$, $\dot{x}(0) = -v_0$.



Mit diesen Annahmen können wir aus dem Energiesatz eine Bewegungsgleichung der Form $\dot{x} = \ldots + \mathcal{O}(\gamma^2)$ herleiten, wobei γ die Newton'sche Gravitationskonstante bezeichnet. Bestimmen Sie daraus die Lösung $x(t) = x^{(0)}(t) + x^{(1)}(t) + \mathcal{O}(\gamma^2)$ bis einschließlich erster Ordnung in γ. Überprüfen Sie das Ergebnis per Dimensionsbetrachtung.

[H23] *Vollbremsung* **[5 Punkte]**

Ein Auto der Masse m fährt mit v_0 entlang der x-Achse. Zur Zeit $t = 0$ macht es eine Vollbremsung. Die Reibungskraft auf der regennassen Straße ist $F(v) = -m\alpha \mathrm{e}^{-\beta v}$ mit positiven Konstanten α, β. Lösen Sie die Bewegungsgleichung, indem Sie zunächst t als Funktion von v bestimmen (statt $v(t)$), und am Ende nach v auflösen. Zu welcher Zeit t_1 kommt das Auto zum Stillstand? Entwickeln Sie $v(t)$ bist $\mathcal{O}(t^2)$ und skizzieren Sie qualitative v als Funktion von t. *Hinweis*: $\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}v} = 1/\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$.

[H24] *Integrale* **[$1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 5$ Punkte]**

Elementare Umformungen, Symmetrie- und anschaulich-geometrische Überlegungen genügen, um die folgenden Integrale auszuwerten:

$$J_1 = \int_0^4 \mathrm{d}x \, (3 - |x - 2|) \, ,$$

$$J_2 = \frac{8}{9} \int_{-4}^{5} \mathrm{d}x \, \frac{2x + \sinh^2(2x - 1)}{\cosh^2(2x - 1)} \, ,$$

$$J_3 = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{12}{\epsilon} \int_0^{2\epsilon} \mathrm{d}x \, \frac{\sin x - x \cos x}{x^3} \, ,$$

$$J_4 = 4t\partial_t \ln \left(\int_0^\infty \mathrm{d}x \, \frac{x}{\mathrm{e}^{x/t} + 1} \right) \, ,$$

$$J_5 = \int_{-2}^{2} \mathrm{d}x \Big(\frac{5}{2} - 7\arctan(3x) \Big) \, .$$

HINWEIS

Bitte geben Sie immer auf Ihren abgegebenen Lösungen Name, Vorname & Matrikelnummer an!